堤坝下游等梯度盖重的计算方法

雷 志 茂

堤坝地基渗流控制，常以双层地基上的平面渗流问题的研究对象。所谓盖重是在堤坝下游原覆盖层上加土设置的压重层，以平稀下卧砂层剩余水头的顶托力，防止流土砂沸等渗透破坏。一般说来地基表层为粉质壤土，渗透系数一般在 10^{-5}Cm\sec 上下，属半透水性。所谓半透水盖重系用透水性与天然表土层相当的土地料筑成，地下水可由表土与盖重向上渗出。在具备砂性土源的地区，半透水盖重已在堤防加固工程中普遍采用；它具有施工简单、管理方便和就地取材等优越性。近二十多年来在长江大堤渗流处理的实际应用中取得了显著的效益。

现行的堤坝下游变厚度盖重的计算理论还很不完善。1946 年，美国的本斯可特（S. U. Ben Scoter）根据本奈特（P. T. Bennett）假定求出了三角形断面铺盖的解。解的级数属柱函数范畴，收敛甚慢。我国水电部东北勘测设计院在顾淦臣教授近似计算变厚度铺盖理论的基础上加以简化并编制了计算曲线，也推导了工盖重长度和厚度的计算公式。安徽省水利科学研究所在刘宣烈变厚度铺盖解的基础上推广得到变厚度盖重的解，并配备有变厚度铺盖函数表。该计算法在数学处理上是比较严密的，计算起来比较复杂，对初学者不易掌握。我们在探讨堤坝下游变厚度半透水盖重工程的设计问题时，既想保持求解理论在数学上的严密性，又要便于实际应用；同时，经济技术指标的要求使得盖重工程的优化设计亟待解决。在这三个前提要求下，本文分析了等梯度盖重的实用计算方法，同时对盖首、盖末渗透比降不同时的盖重计算，也作了探讨。

本文仍以 P. T. 本奈特假定为基本假设[1]：

1．下卧透水层与表土覆盖层的渗透系数比值大于 10^2。

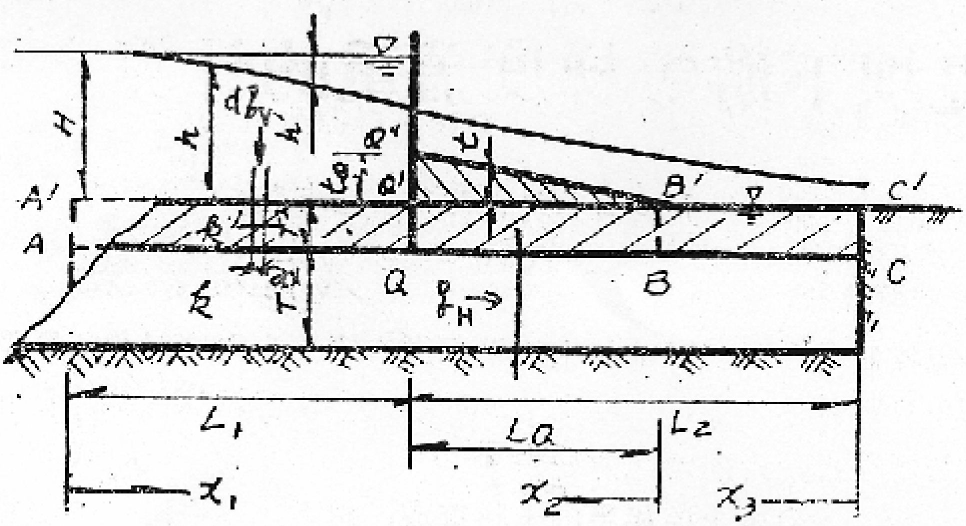
2．渗透通过表土层的流线基本呈垂直向，而通过砂层的流线的基本呈水平向。

3．由于堤基宽度与越流系数的倒值 1/A 相比较小，堤身通过的渗流忽略不计——采用安徽省水科所提出的以虚拟板桩代替土堤以简化边界条件[1]。

（一）盖重渗流分析

图（一）所示为双层地基和堤防上下游的全剖面图。为使问题的讨论带有普遍性，

图中砂层一端敞露，而另一端封闭（即砂层尖灭）。根据层厚与渗透系数沿程变化的情况，将堤坝上下游全程划分为三个计算段：上游段 AQ，盖重段 QB，下游段 BC。T、T′与 K、K′分别为砂层与覆盖层的层厚和渗透系数；$t_{Q.}$ 为下游半透水变厚度盖重的首端厚度，L_Q 为设计盖重长度。取实用坐标系如图所示，并取原地面为竖向的基准零点。



图（一）

首先分析盖重段的渗流微分方程。设砂层沿程变化的单寒风流量为 q，水头为 h，水头损失为 h′=H-h；并设下游垂直方向的出逸坡降为 J_V。

由于地下水于盖重顶面——即盖重段的地面逸出，相对于原地面的基准零点盖重顶面水头随高程面异：

$$J_V = -\frac{t-h}{T'+t} = \frac{h-t}{T'+t}$$

根据堤坝下游半透水变厚盖厚的优化设计要求，应使下游盖重顶面每一点的垂直出逸坡降都等于允许的出逸坡降：

$$J_V = J_O$$

故有 $U_V = K'J_O$

并可知 $J_O = \dfrac{h-t}{T'+t}$

变形得到砂层位势与盖重厚度的函数关系式：

$$h = (1+J_O)t + J_O T'$$

或 $$t=\frac{1}{1+J_O}(h-J_OT')$$

在盖重优化设计的前提条件下，根据达西定律、本奈特假定和流量平衡原理，可以推导出盖重段的渗流微分方程。

水平方向通过砂层 QB 段的单宽流量为 q_H： [4]

$$q_H=KT\frac{dh}{dx}\quad(\frac{dh}{dx}>O)\qquad\qquad \frac{dq_H}{dx}=KT\frac{d^2h}{dx^2}$$

垂直方向通过复盖层 dx 段的出渗单宽流量为 $d^q{}_V$：

$$dq_v=k'J_Odx\qquad\qquad \frac{dq_v}{dx}=k'J_O$$

根据渗流层流的连续性原理 $q_H=q_V$，

有 $\frac{dq_H}{dx}=\frac{dq_V}{dx}$。

综上分析：$KT\frac{d^2h}{dx^2}=k'J_O$，整理得到：$\frac{d^2h}{dx^2}=m$

式中无量纲值，$m=\frac{k'J_O}{KT}=\frac{k'}{KTT'}J_OT'=A^2J_OT'$ 谓盖重常数。

$A=\sqrt{\frac{K'}{KTT'}}$ 系盖重段原始状态的越流系数，单位为 1/米。

微分方程的通解可以直接写出：

$$h=\frac{1}{2}mx^2+C_3x+C_4\qquad (O\le x\le L_Q)\tag{1}$$

相应的盖重函数为：

$$t=\frac{1}{1+J_O}(\frac{1}{2}mx^2+C_3x+C_4-J_OT')\qquad (O\le x\le L_Q)\tag{2}$$

还可以直接写出砂层顶点水头分布的水力坡降函数：

$$\frac{dh}{dx}=mx+C_3\tag{3}$$

至于上游段 AQ 与下游段 BC 的渗流分析已有许多比较详尽的论述[1]，可以直接引用其结论。

在图中所取的实用坐标系中，上下游两段的渗流微分方程均系同一类型的二阶常系数齐次线性微分方程：

上游段 AQ：

$$\frac{d^2h'}{dx^2} - A^2h' = 0 \qquad (0 \le x \le L_1)$$

下游段 BC：

$$\frac{d^2h}{dx^2} - A^2h = 0 \qquad (0 \le x \le L_2 - L_Q)$$

相应的通解与微商分别为：

$$h' = C_1e^{Ax} + C_2e^{-Ax} \qquad (0 \le x \le L_1) \tag{4}$$

$$\frac{dh'}{dx} = A(C_1e^{Ax} - C_2e^{-Ax}) \qquad (0 \le x \le L_1) \tag{5}$$

$$h = C_5e^{Ax} + C_6e^{-Ax} \qquad (0 \le x \le L_2 - L_Q) \tag{6}$$

$$\frac{dh}{dx} = A(C_5e^{Ax} - C_6e^{-Ax}) \qquad (0 \le x \le L_2 - L_Q) \tag{7}$$

（二）盖重参数计算

三段渗流微分方程的通解及其微商均已导出，剩下的问题是根据边界条件和水头与水力坡降的连续条件列出包含 L_Q 在内的待定系数联立方程组并予求解。而在具体分析边界条件与连续条件时，我们先假定盖重长度 L_Q 为已知，以建立起待定系数的求解方程组。

1．A、C 两个端面的边界条件

AA' 端面有 $\begin{cases} x = 0 \\ h' = 0 \end{cases}$

代入式（4）可知：

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{8}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{dh}{dx} = 0 \end{cases}$$

代入（7）式又可知：

$$C_5 - C_6 = 0 \tag{9}$$

2．盖重首端 QQ' 断面的连续条件

所谓某一断面上的水头与水力坡降的连续条件是指该断面两侧——左侧

（Left-hand）与右侧（Right-hand）的水头与水力坡降在同一断面上的连续关系。

QQ′断面上的水头连续条件为：

$$h'_{QL} + H_{QR} = H$$

以 $X=L_1$ 代入（4）式

$$h'_{QL} = C_1 e^{AL1} + C_2 e^{-AL1}$$

再以 $X=L_Q$ 代入（1）式

$$h_{QR} = \frac{1}{2} m L_Q^2 + C_3 L_Q + C_4$$

于是有：

$$C_1 e^{AL1} + C_2 e^{-AL1} + \frac{1}{2} m L_Q^2 + C_3 L_Q + C_4 = H \tag{10}$$

QQ′断面上的水力坡降连续条件为：

$$\left.\frac{dh'}{dx}\right]_{QL} = \left.\frac{dh}{dx}\right]_{QR}$$

又以 $x=L_1$ 代入（5）式

$$\left.\frac{dh}{dx}\right]_{QL} = A(C_1 e^{AL1} - C_2 e^{-AL1})$$

以 $x=L_Q$ 代入（2）式

$$\left.\frac{dh'}{dx}\right]_{QR} = mL_Q + C_3$$

于是又有：

$$A(C_1 e^{AL1} - C_2 e^{-AL1}) = mL_Q + C_3 \tag{11}$$

3．盖重末端BB′断面的连续条件

水头连续条件：$h_{BL}=h_{BR}$

以 $x=0$ 代入（1）式：$h_{BL}=C_4$

以 $x=L_2-L_Q$ 代入（6）式：$h_{BR} = C_5 e^{A(L2-LQ)} + C_6 e^{-A(L2-LQ)}$

于是有：

$$C_4 = C_5 e^{A(L2-LQ)} + C_6 e^{-A(L2-LQ)} \tag{12}$$

水力坡降连续条件：

$$\left.\frac{dh}{dx}\right]_{BL} = \left.\frac{dh}{dx}\right]_{BR}$$

以 $x=0$ 代入（3）式

$$\left.\frac{dh}{dx}\right]_{BL}=C_3$$

以 x=L_2−L_Q 代入（7）式

$$\left.\frac{dh}{dx}\right]_{BR}=A\left[C_5e^{A(L2-LQ)}-C_6e^{-A(L2-LQ)}\right]$$

又可以得知：

$$C_3=A\left[C_5e^{A(L2-LQ)}-C_6e^{-A(L2-LQ)}\right] \qquad （13）$$

联立（8）、（9）、（10）、（11）、（13）六个方程为待定系数方程组，求解 C_1~C_6 六个待定系数。但是因为设计盖重长度 L_Q 只是假定为已知而实则未知，这就须要补充一个边界条件。

按优化设计的出发点，盖重末端 BB′ 断面当 x=0 时 t=0，代入盖重函数式（2）可以解得：

$$C_4=J_0T' \qquad （14）$$

用逐次代入法求解待定系数方程组，可以得到一个以设计盖重长度 L_Q 为未知量的超越方程：

$$\frac{1}{2}mL_Q^2+AJ_0T'L_Q[thAL_1+thA(L_2-L_Q)]+J_0T'[1+thAL_1thA(L_2-L_Q)]-H=0$$

$$（0\le L_Q\le L_2） \qquad （15）$$

在确定了 L_Q 后，相应的其他待定系数为：

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{mL_Q+AJ_0T'thA(L_2-L_Q)}{2AchAL_1}\\ C_2=-C_1\\ C_3=AJ_0T'thA(L_2-L_Q)\\ C_4=J_0T'\\ C_5=\dfrac{J_0T'}{2chA(L_2-L_Q)}\\ C_6=C_5\end{cases}$$

相应地盖重函数解析式为：

$$t=\frac{1}{1+J_0}\left[\frac{1}{2}mL^2+ALJ_0T'thA(L_2-L_Q)\right] \qquad (0\le L\le L_Q) \qquad （16）$$

（三）参数计算的讨论

综上分析，求解超越方程（15）是计算盖重参数的关键。一般来说，方程（15）有两种解析方法求解[3]。

方法之一是设（15）式的左边为连续于闭区间[0，L_2]上的实函数 Y=f（L）；只须计算 3~5 个点即可画出它的图形如图（四）-b 所示，这条曲线与实轴 L 的交点 L_Q 即为我们所求的设计盖重长度。

方法之二是将（15）式的左边一分为二：

$$H-(J_0T'+\frac{1}{2}mL_Q^2+AJ_0T'L_Q thAL_1)=J_0T'(AL_Q+thAL_1)thA(L_2-L_Q)$$

其左边 $Y_1=f_1$（L）为一抛物线，右边 $Y_2=f_2$（L）系双曲函数，两条曲线的交点所对应的横座标 LQ 亦即所求的设计盖重长度。

有必要指出的是，当 L_2 为有限长，J_0 又根据地质条件和土粒特性选定了取值范围时，求解超越方程（15）式往往会出现在闭区间[0，L_2]内无解的情形，即 f（L）与 L 轴无交点。这说明在既定条件下即使 L 取极限值 $L_{max}=L_Q=L_2$，所论盖重工程仍然达不到渗流稳定的要求：盖重末端须要远移（延长 $L_Q>L_2$）或盖重厚度要坛大。这时可以先选定 L_Q 值等于 L_2，重新求解盖重函数 t（x）。

如图（二）所示，J_0 与 L_Q 均予先确定，加大盖重厚度而使其达到维持地基渗流稳定的目的，这时的渗流分段只有上游段 AQ 与下游盖重段 QB。各段渗流微分方程及其通解和微商均如前述——即如式（4）、（1）和（5）、（3）；只是 BB'由中间断面变成了盖重的末端断面。

$$\begin{cases} \mathrm{x}=0 \\ \dfrac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dx}}=0 \end{cases}$$

代入（3）式得

$$C_3=0$$

于是有待定系数联立方程组：

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 & (8)' \\ c_1 e^{AL1}+c_2 e^{-AL1}+\frac{1}{2}mL^2{}_2+C_3L_2+C_4=H & (10)' \\ A(c_1 e^{AL1}-c_2 e^{-AL1})=mL_2+C_3 & (11)' \\ C_3=0 \end{cases}$$

待定系数的求解结果为：

$$C_1=\frac{mL_2}{2AchAL_1}$$

$$C_2=-C_1$$

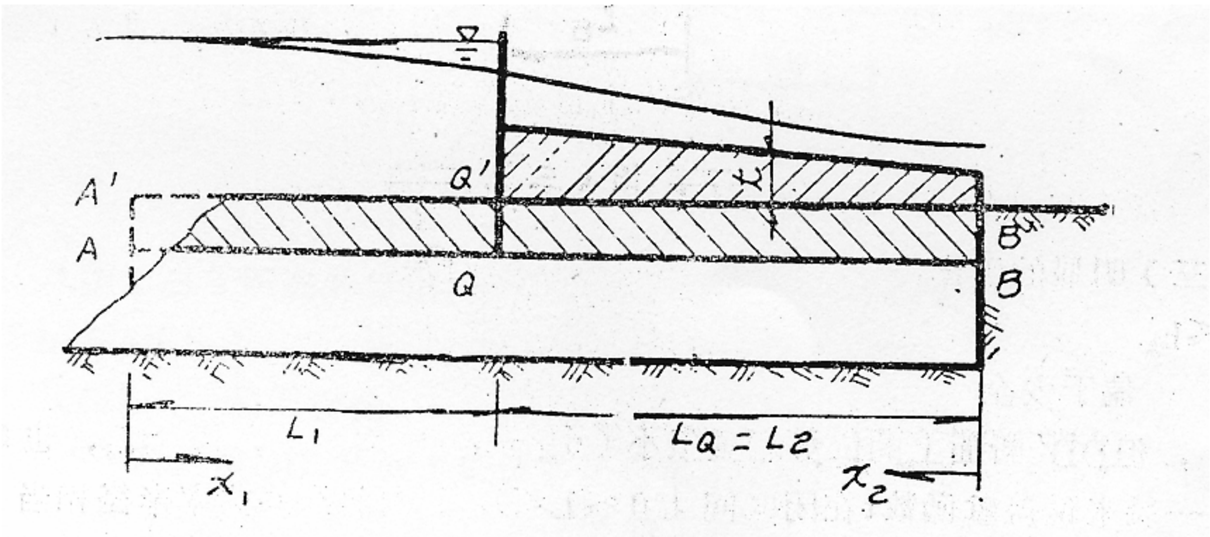
$$C_3=0$$

$$C_4=H-(\frac{1}{2}mL_2^2+AJ_0T'L_2thAL_1)$$

代入式（2）得到相应的盖重函数为：

$$t=\frac{1}{1+J_0}\left\{\frac{1}{2}mL^2+H-\left[\frac{1}{2}mL_2^2+J_0T'(1+AL_2thAL_1)\right]\right\}\qquad(0\le L\le L_2)\qquad（17）$$

系一二次抛物线。



—— 图（二）——

这种堤内沙层尖灭时取 $L_Q=L_2$ 的盖重计算方法可谓之“满盖重”法。

在堤坝下游变厚度半透水盖重工程的参数设计中，其首先两端的垂直允许出逸坡降往往取用不同的安全标准：首端为 J_a，末端 J_b，且有 $J_a\le J_b$。

这样进行设计处理的目的有三个：

1．因为一般盖重长度较长，适当提高堤脚近段防止流土与砂沸的抗渗能力是安全的。

2．节省盖重土方。在满足抗渗安全指标的前提下降低工程造价。

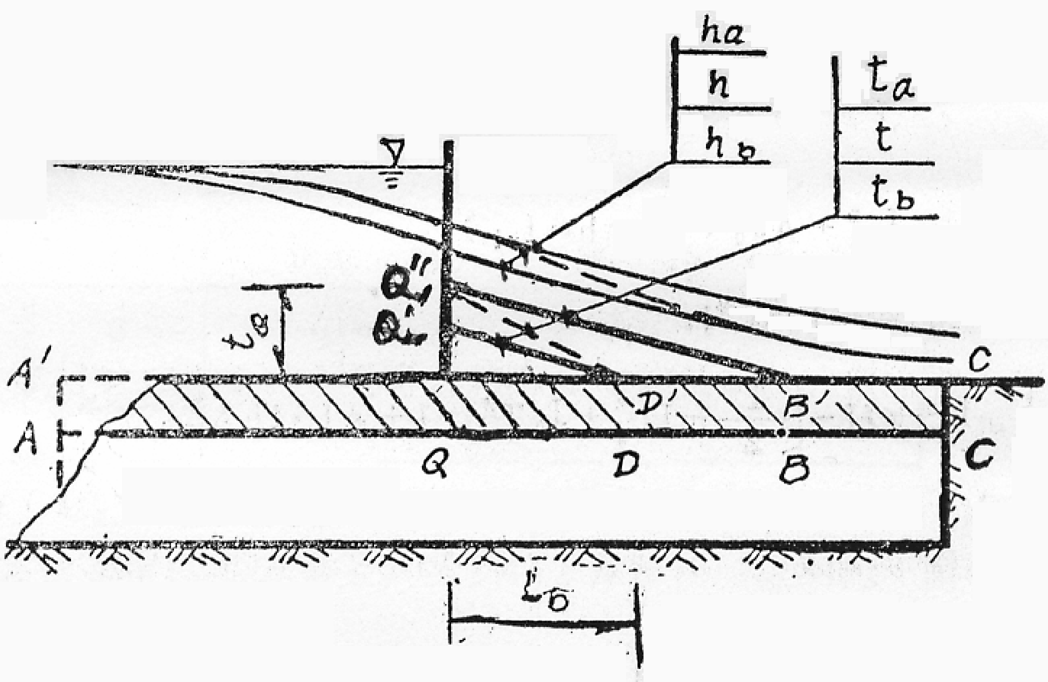
3．加陡了盖重面的坡降，便于排除堤脚附近的积水。

正是为了达到上述安全、经济的综合效益指标，我们在具体设计堤坝下游变厚度半透水盖重断面时，拟按下述三个步骤进行：

第一步：首先确定盖首垂直允许出逸坡降 $J_0=J_a$ 并据此计算出盖重首端的设计厚度 t_Q——从而得到图（三）所示的 Q " 点。

第二步：再按拟定的盖末垂直允许出逸坡降 $J_0=J_b$ 且有 $Jb\geqslant J_a$，确定盖重长度 L_b 与盖末厚度 t_b——得到图（三）中所示的 D′ 点。

第三步：联接 Q"D′ 即为优化设计的盖重断面。图（三）中△Q"D′B′ 即是三角形盖重的优化设计区：Q"为盖顶点，线段 D′B′ 为盖末区间。



—— 图（三）——

从图（三）明显的看出：

$h_b \le h \le h_a$

$J_Q \le J_a$ 偏于安全

$J_{D'} \ge J_a$，但 DD′ 断面上的位势坛量很小 $(dh = h - h_b \approx 0)$，$J_{D'} \approx J_b$ ，也是允许的。同时，一般来说盖重函数 t 在闭区间 $[0\leqslant L\leqslant L_b]$ 内曲线的曲率半径相当大，可以作直线化处理，因而常见的盖重断面均为三角形或梯形。

四、计算实例

宿松县同马江堤王家洲西段（42+400～42+700）的堤防与地层剖面如图（四）-a 所示。提内拟作变厚度半透水盖重。图中所给的各项数据为：

$k' = 1.0\times10^{-8}$ cm/sec;　　$T' = 3.4$ M;

$K = 1.56\times10^{-3}$ cm/sec;　　$T = 6.1$ M;

$L_1 = 1.35$ M;　　$L_2 = 215$ M;　　$H = 6.1$ M;

由于地质勘探时表土层取样很少，力学指标不全，根据王家洲地基的土质情况，参考一般经验数据分别选取该堤段下游盖重首末两端的垂直允许出逸水力坡降为：$J_a = 0.5$；$J_b = 0.7$。

1．按 J_0=Ja=0.5 计算盖重首末两端厚度 ta 与 t'_b:

（1）按（15）式计算盖重长度 L_Q:

$$\frac{1}{2}mL_Q^2 - AJ_aT'L_Q\left[thAL_1 + thA(L_2 - L_Q)\right] + J_aT'\left[1 + thAL_1thA(L_2 - L_Q)\right] - H = 0$$

$$(0 \le L_Q \le L_2) \qquad （15）'$$

式中常数：

$$A = \sqrt{\frac{K'}{KTT'}} = \sqrt{\frac{1.0\times10^{-6}}{1.56\times10^{-3}\times6.1\times3.4}} = \sqrt{\frac{1}{32354.4}} = \frac{1}{180} \quad （1/米）$$

$$m = A^2J_aT' = \frac{0.5\times3.4}{32354.4} = \frac{1}{19031} \quad （1/米）$$

列表并首先计算闭区间[0，L_2]的两端：

L	0	…………………	215
f（L）	-3.2717	…………………	-1.6659

显然，在闭区间[0，L_2]内整个曲线 f（L）位于 L 轴以下而不与 L 轴相交。由于 L_2=215 米处砂层尖灭，延长盖重长度 L_Q 似无必要，我们拟采取前面所介绍的“满盖重”法，即取盖重长度 L_Q=L_2=215 米。

（2）直接根据（17）式计算盖重首末两端厚度：

$$t = \frac{1}{t + J_a}\left\{\frac{1}{2}mL^2 + H - \left[\frac{1}{2}mL_2^2 + J_0T'(1 + AL_2thAL_1)\right]\right\} = \frac{1}{1.5}\left\{\frac{L^2}{38064} + 1.67\right\}(0 \le L \le L_2)$$

（17）′

L（M）	0	215
t（M）	t'_b**=1.11**	t_Q=1.92

2．$J_0 = J_b = 0.7$，计算盖重长度 L_b 及盖末厚度 t_b:

$$m = A^2J_bT' = \frac{0.7\times3.4}{32354.4} = \frac{1}{13594} \qquad (1/米)$$

首先亦按（15）式计算盖 Lb:

L	0	190	200	215
f（L）	-2.2324	-0.0113	0.0064	0.0158

如图（四）-b 所示，解得 L_b=195 米。

再按（16）式计算盖重首末厚度：

$$t=\frac{1}{1+J_b}\left[\frac{1}{2}mL^2+ALJ_bT'thA\left(L_2-L_b\right)\right] \qquad \left(0\le L\le L_b\right) \qquad (16)'$$

L（M）	0	195
t（M）	0	0.9905

3．优化设计盖重：

取三角形盖重：

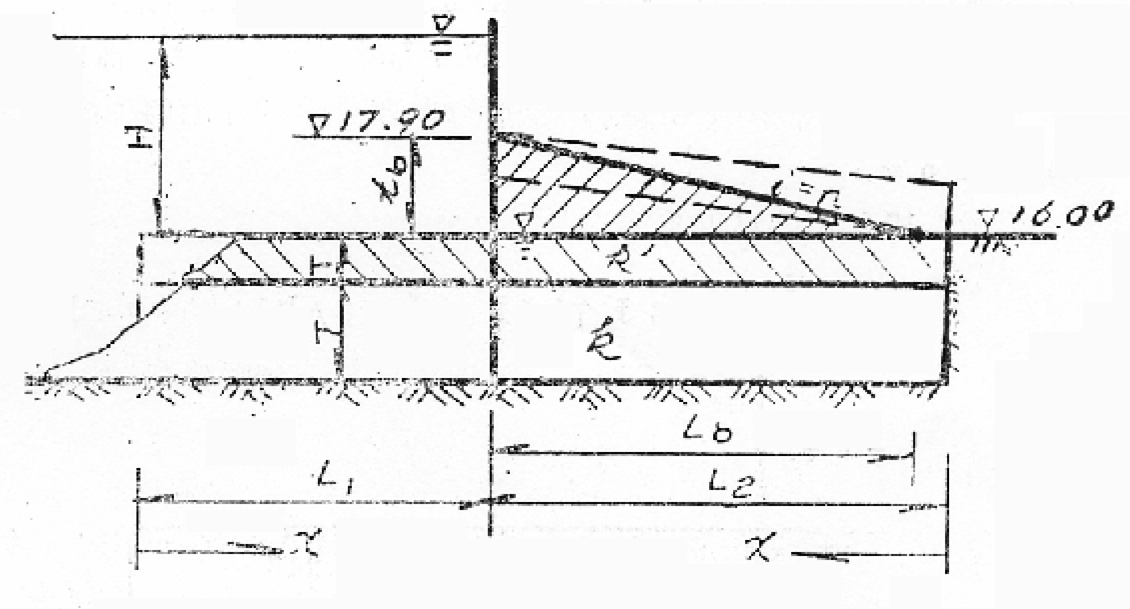
盖首高程为：16.00+1.90=17.90（M）

盖末高程为：16.00M（平地面）

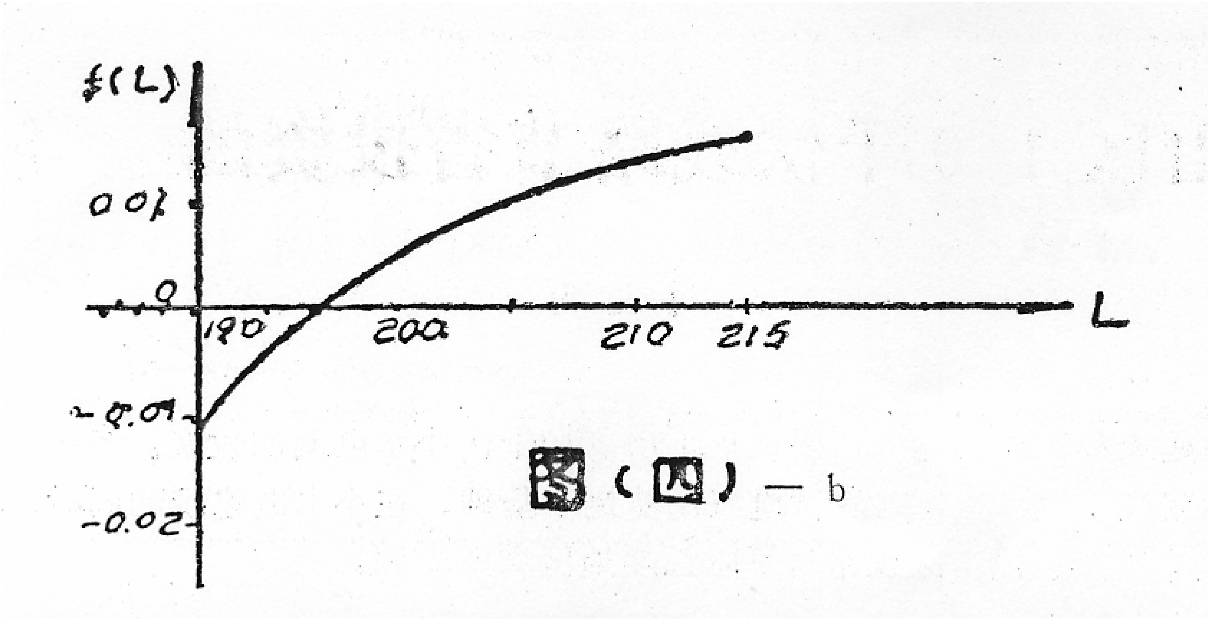
盖重长度 L_b=195 米。

盖重面坡降：$n=\frac{t_Q-t_b}{L_b}=\frac{1.90-0}{195}=\frac{1}{103}$

盖重断面积：$S=\frac{1}{2}\times\times1.90\times195=185.25m^2$



图（四）—a



图（四）— b

由于堤坝内外砂层均有敞露、尖灭和无限延伸三种情况，再加上堤内砂层尖灭的“满盖重”特例，我们一般常见的双层地基盖重计算平面课题有十二种边界组合情况，其盖重参数的计算公式基本上可分为两组，西方限于篇幅，就不一一赘述了。

参考文献

[1]安徽省水利科学研究所：多层地基和减压沟井的渗流计算理论。水利出版社，1980 年。

[2]水利电力部第五工程局、水利电力部东北勘测设计院：土坝设计下册，水利电力出版社，1978 年。

[3]天津大学 27 所高等工业学校：高等数学，人民教育出版社，1960 年。

[4]华东水利学院编：水力学，上册，科学出版社，1979 年。